

به نام خدا

۱. حداکثر خطای نسبی محاسبه حجم یک کره از فرمول $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ چقدر است، هرگاه تقریبی از اعداد π و $\frac{1}{3}$ با خطای نسبی حداکثر 0/002 داشته باشیم و شعاع را بتوان با حداکثر خطای نسبی 0/002 اندازه‌گیری کرد؟

۲. در یک دستگاه ممیز شناور که در آن اعداد به صورت $\pm 0/d_1d_2d_3d_4 \times 10^n$ با $d_1 \neq 0$ و $-7 \leq n \leq 8$ و $0 \leq d_i \leq 9$ نمایش داده می‌شوند فاصله بین عدد ۱۰۰۰۰ و اولین عدد قابل نمایش بزرگتر از ۱۰۰۰۰ را به دست آورید.

۳. اگر مقدار $\ln(1+x)$ را با استفاده از دو جمله اول بسط مک لورن آن تقریب بزنیم، مقدار تقریبی و حداکثر خطای محاسبه $\ln(1.1)$ را به دست آورید.

۴. اگر از روش دوبخشی برای محاسبه ریشه مثبت معادله $3xe^x = 1$ در بازه $[0, 1]$ با دقت 0.5×10^{-4} استفاده شود، حداقل چند تکرار از روش دوبخشی لازم است؟

۵. مرتبه همگرایی روش نیوتن برای پیدا کردن ریشه‌های $f(x) = x^4 - 2x^2 = 0$ در صورتی که به ریشه همگرا شود، را به دست آورید.

۶. طرح تکراری $x_{n+1} = \frac{2}{3} \left(x_n + \frac{1}{x_n^2} \right)$ با چه مرتبه ای و به چه مقداری همگراست؟

۷. فرض کنید $f(x) = x + \cos x$ و $x_0 = 0$ و $x_1 = 0.5$ باشد. مقدار x_2 در روش وتری را به دست آورید.

۸. در محاسبه دوره تناوب آونگ ساده $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ، درباره اثر خطای نسبی مقادیر π, l, g در خطای نسبی T بحث کنید.

۹. در یک دستگاه ممیز شناور که در آن اعداد به صورت $\pm 0/d_1d_2d_3d_4 \times 10^n$ با $d_1 \neq 0$ و $0 \leq d_i \leq 9$ و $-7 \leq n \leq 8$ با گرد کردن نمایش داده می‌شوند، بزرگترین عدد x که در معادله $500 + x = 500$ صدق می‌کند را به دست آورید.

۱۰. اگر مقدار دقیق و تقریبی در توانی از ده ضرب شوند، در مورد خطای نسبی و مطلق چه می‌توان گفت؟

۱۱. تابع $g(x) = 1 + \tan^{-1} x$ در چه بازه‌ای نقطه ثابت دارد؟

۱۲. روش دوبخشی با شروع از بازه $[-1/75, 2/5]$ به کدامیک از صفرهای $f(x) = (x+2)(x+1)^2x(x-1)^3(x-2)$ همگرا است؟

۱۳. مرتبه همگرایی روش نیوتن به ریشه $\alpha = 0$ برای $f(x) = e^x - e^{-x}$ را به دست آورید.

۱۴. در محاسبه تقریبی $\ln(1/001)$ با سه جمله از بسط تیلور، حداکثر خطا را به دست آورید.

۱۵. با این فرض که $f(x) = \cos x + e^x$ ، $x_0 = 0$ ، x_1 با روش نیوتن و x_2 با روش وتری به دست آید، x_1 و x_2 را به دست آورید.

سوال ۹۱-۹۰

۱- در صورتیکه بخواهیم تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقاط مساوی الفاصله x_0, x_1, \dots, x_n

باطول h برای بازه $[1, 2]$ با استفاده از چندجمله‌ای درون‌یابی تقریب بزنیم، حداکثر مقدار h را طوری بیابید که خطای تابع درونیاب f حداکثر 10^{-8} باشد.

سوال اول ۹۱-۹۲

۲- الف) روش‌های درونیابی لگرانژ و نیوتون را مقایسه کنید. ب) چندجمله‌ای

درونیاب تابع جدولی را به دست آورید. سپس نقطه $(2, 43)$ را به جدول

افزوده و چندجمله‌ای درونیاب را مجدداً به دست آورید.

x_i	-1	1	2	3	4
f_i	-2	5	7	24	43

سوال اول ۹۲-۹۳

۳- چندجمله‌ای درونیاب $f(x) = \sin x$ را به ازای نقاط $x_0 = 1$ و $x_1 = \frac{3}{4}$

$x_1 = \frac{1}{4}$ و $x_2 = 0$ بیابید. سپس کران بالای خطای درونیابی این تابع را بیابید.
 کنید.

سوال دوم ۹۲-۹۳

۴- الف) جدول خطای درونیابی تابع مفروض $f(x)$ در $n+1$ نقطه‌ی مجزا:

$n, n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0$ را بدون اثبات بیان کنید.

ب) با استفاده از فرمول الف، تعیین کنید بازه $[a, b]$ را به چند زیر بازه

مساوی الفاصله تقسیم کنیم که خطای درونیابی تابع $f(x) = \sin x$ کمتر از 10^{-3}

باشد. با استفاده از نقاط گره‌ای حاصل با این معیار دقت چندجمله‌ای

درونیاب تابع ذکر شده را به دست آورید.

سوال اول ۹۳-۹۴

۵- چندجمله‌ای درونیاب $f(x) = \sin \frac{x}{8}$ را به ازای نقاط $x_0 = 0$ و $x_1 = \frac{1}{2}$ و $x_2 = 1$ را

بیابید. سپس کران بالای خطای درونیابی این تابع را در این نقاط بیابید.

آیا چندجمله‌ای درونیاب حاصل تقریب مناسب برای تابع فوق است و چرا؟

سوال اول ۹۴-۹۵

۶- ابتدا جدول زیر را تکمیل کنید. سپس تقریبی از $f(1.62)$ را به کمک درونیابی به دست آورید.

x_i	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f_i = \cosh x_i$					

5

۷- فرض کنید $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ و $x_i = \frac{1}{n}$ و $i=0, 1, 2, \dots, n$

تیمسال دوم ۹۵-۹۶

الف) یک چندجمله‌ای از درجه چهار در نقاط گره‌ای x_i برای $f(x)$ بگزارس کنید
(چندجمله‌ای درونیای)

ب) در حالت کلی اگر به ازای نقاط $n, n-1, \dots, 1$ و $x_i = \frac{1}{n}$

$P(x)$ یک چندجمله‌ای درونیای $f(x)$ باشد. نشان دهید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

۸- چندجمله‌ای درونیای $f(x) = \cos(\frac{\pi x}{4})$ را در نقاط

تیمسال اول ۹۴-۹۵

$x_0=0, x_1=1, x_2=2$ نسبت آورید و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید.

تعداد $|f(\frac{3}{4}) - P(\frac{3}{4})|$ و $|f(\frac{1}{4}) - P(\frac{1}{4})|$ را با یکدیگر مقایسه کنید.

مقایسه کنید. آیا چندجمله‌ای درونیای حاصل تقریب مناسبی برای تابع

f است؟

۹- چندجمله‌ای لانژرنژی بنویسید که از نقاط $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$

تیمسال اول ۹۷-۹۸

گذرد. سپس عبارت $\frac{x^3 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ را به صورت جمع جبری چند کسر جزئی بنویسید.

۱۰- تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $[1, 2]$ مفروض است. این فاصله را به چند زیر فاصله

به فرم $[x_i, x_{i+1}]$ به طول h تقسیم کنید تا خطای حاصل از روشی تابع به

وسیله چندجمله‌ای درجه دوم که f را در نقاط x_{i-1}, x_i, x_{i+1} درونیای می‌کند

کوچکتر از 10^{-7} باشد؟

۱۱- چندجمله‌ای درونیای تابع جدولی زیر را با استفاده از $f(1)$ و $f(2)$ بسازید.

تیمسال دوم ۹۷-۹۸

x_i	۱	۱,۳	۱,۴	۱,۹	۲,۳
f_i	۰,۷۰۷۱	۰,۴۲۱	۰,۶۵۵۶	۰,۳۱۱۸	۰,۱۱۰۶